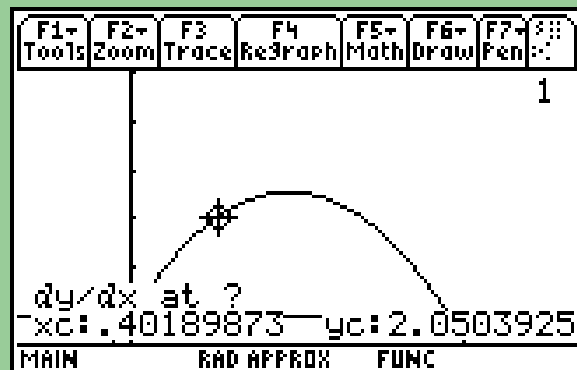


LE DERIVATE



APPROCCIO
INTUITIVO

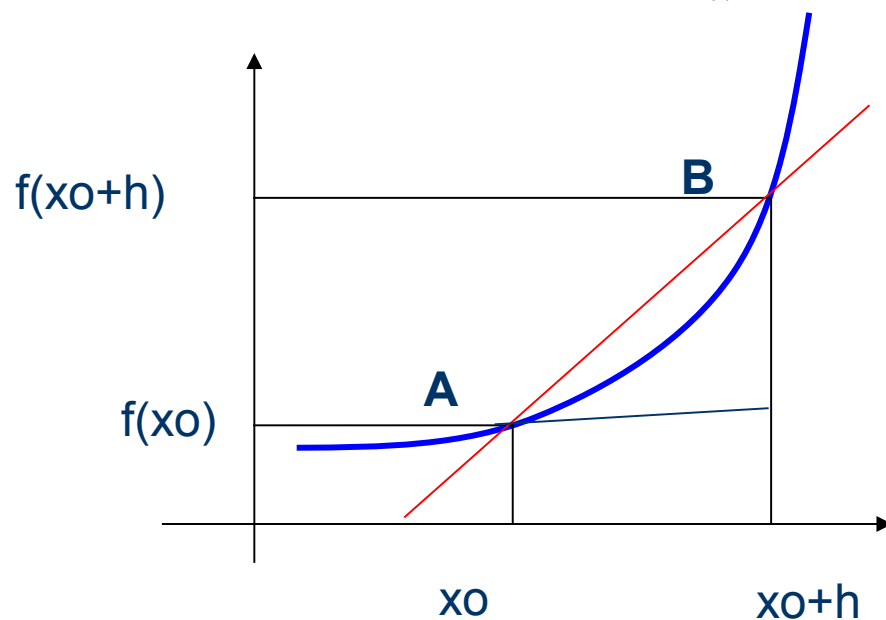
- La **derivata** di una funzione è, insieme all'integrale, uno dei cardini dell'analisi matematica e del calcolo infinitesimale

RAPPORTO INCREMENTALE

- Sia $y = f(x)$ una funzione reale definita in un intorno di x_0 .
- Si consideri un incremento $\Delta x = h$ (positivo o negativo) di x_0 .
- La funzione passerà allora dal valore $f(x_0)$ a quello di $f(x_0+h)$, subendo così un incremento $\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$.
Si definisce **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ il rapporto tra l'incremento della funzione e l'incremento corrispondente della variabile indipendente, cioè:

RAPPORTO INCREMENTALE

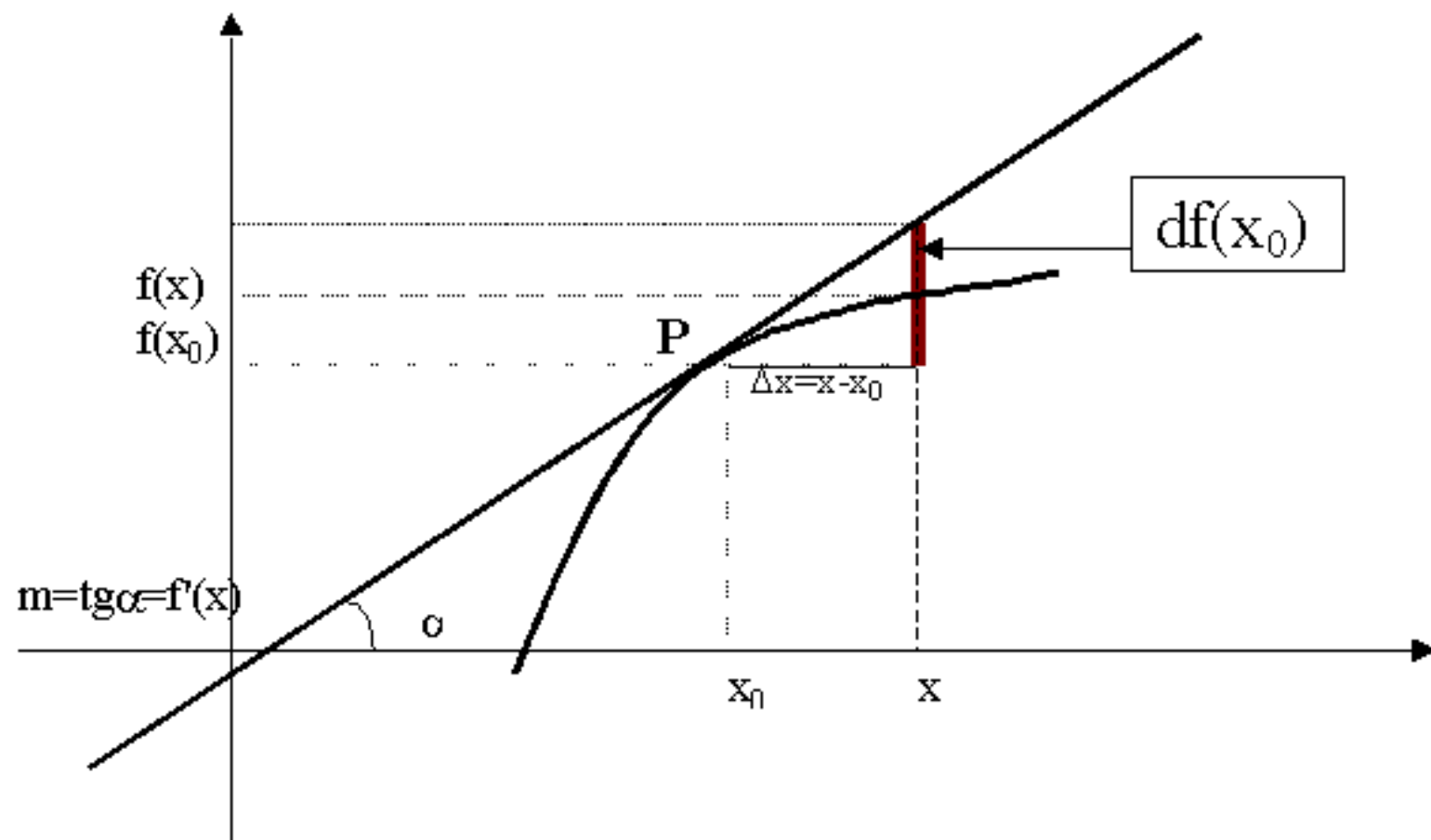
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(X_0 + h) - f(X_0)}{X_0 + h - X_0} = \frac{f(X_0 + h) - f(X_0)}{h}$$



- Se, quando si fa tendere a 0 l'incremento h , il suddetto rapporto assume un particolare valore limite, tale limite prende il nome di derivata di f in X_0 .
-

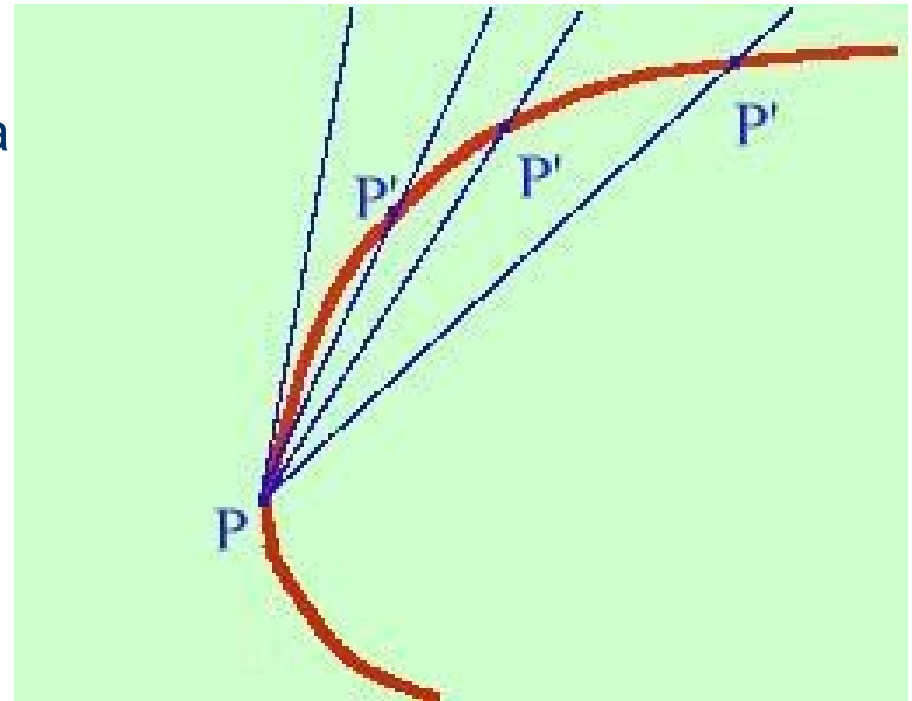
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h) - f(X_0)}{h} = f'(X_0)$$

- Un modo semplice di capire cos'è la derivata è guardare al suo significato geometrico: geometricamente la derivata di una funzione f in un punto x_0 è la misura della pendenza (il **coefficiente angolare**, cioè la tangente dell'angolo fra la retta tangente e l'asse orizzontale) della retta tangente alla **curva** rappresentata dal **grafico** della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.



RETTA TANGENTE

- Fissiamo un punto P su una curva , poi un altro punto
- P' diverso da P e tracciamo la corda PP' ; ora basta far scivolare P' sulla curva verso P e quando P' sara' coincidente con P avremo la retta tangente alla curva in P (*sono state* tracciate delle semirette invece che rette per rendere piu' semplice la figura)



- Definizione: si definisce tangente ad una curva in un punto P la posizione limite della retta secante, congiungente P con un altro punto P' della curva, al tendere del secondo punto sul primo .

- Ora se riprendiamo la definizione di derivata, vediamo che, quando h tende a zero, il secondo punto sulla curva si sposta verso il primo punto fino a coincidere
Inoltre il rapporto incrementale e' è uguale al coefficiente angolare della retta che congiunge i due punti sulla curva.
Quindi, al limite, la derivata ed il coefficiente angolare della retta tangente alla curva devono coincidere cioè:

- Definizione: la derivata di una funzione in un punto x_0 è uguale al coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in quel punto

SIGNIFICATO FISICO

- Se f è la funzione che dà lo spazio in funzione del tempo, derivando si ottiene la velocità.
- Derivando la velocità rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione.

- INFATTI ,
- Se t_0 è l'istante iniziale e t_0+h è l'istante finale
- VELOCITA' MEDIA = Rapporto incrementale

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

VELOCITA' ISTANTANEA:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

IN PRATICA I SEGUENTI PROBLEMI

- DATA UNA CURVA DI EQUAZIONE $Y=F(X)$, COME SI PUO' DETERMINARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE IN UN SUO PUNTO?
- SE SI CONOSCE LA LEGGE ORARIA DI UN PUNTO MATERIALE, COME SI PUO' CALCOLARE LA SUA VELOCITA' ISTANTANEA?

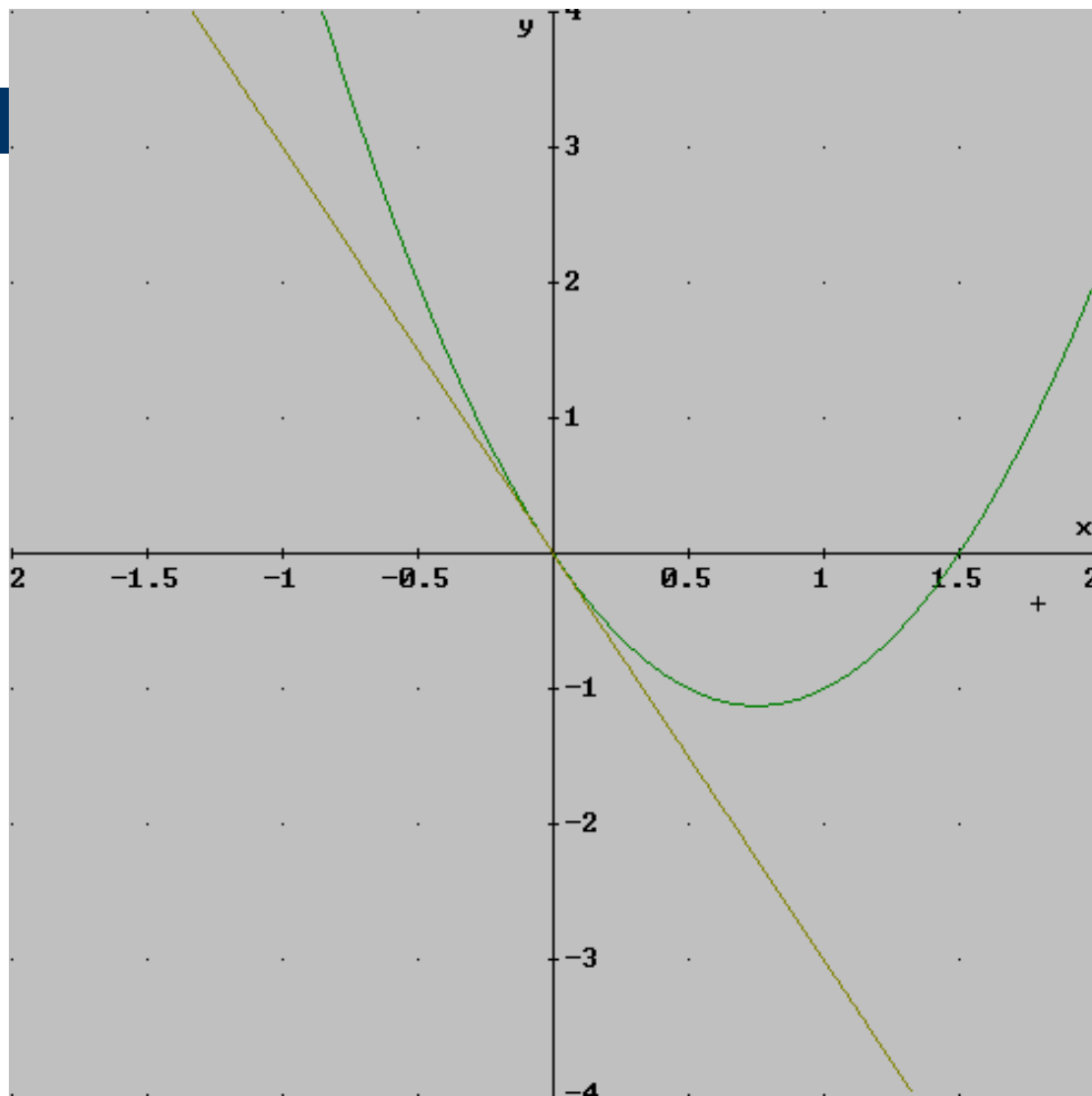
**SARANNO RISOLTI QUANDO
SAPREMO RISPONDERE A QUESTA
DOMANDA:**

- **COME SI PUO' DETERMINARE LA
DERIVATA DI UNA FUNZIONE ?**

- **Dalla definizione di derivata si ricava immediatamente che la derivata di una funzione il cui grafico è una retta è il coefficiente angolare della retta.**

DERIVATA DI $f(x) = ax^2+bx+c$

- In figura
- La parabola di equazione
- $y = 2x^2 - 3x$
- E la retta tangente nell'origine
- $y = -3x$



SI PARTE DAL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{a(xo + h)^2 + b(xo + h) + c - axo^2 - bxo - c}{h} =$$

$$\frac{axo^2 + 2ahxo + ah^2 + bxo + bh + c - axo^2 - bxo - c}{h} =$$

$$\frac{2ahxo + ah^2 + bh}{h}$$

- SEMPLIFICANDO h

$$2axo + ah + b$$

- MA QUANDO h TENDE
A 0

- IL VALORE
PRECEDENTE TENDE
A

$$2axo + b$$

PERTANTO

- IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AD UNA PARABOLA DI EQUAZIONE

- $Y = ax^2 + bx + c$
- In un punto di ascissa x_0
- E' UGUALE A

$$2ax_0 + b$$


- SE UN PUNTO CHE SI MUOVE DI MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO ,
- CON LEGGE ORARIA

$$S = V_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

- LA SUA VELOCITA' ISTANTANEA E'

- $V = V_0 + at$

ESERCITAZIONE COL FOGLIO ELETTRONICO

- Con il foglio elettronico è possibile determinare in modo approssimato i valori della derivata di una funzione, come rapporti incrementali corrispondenti a incrementi $\ll h \gg$ abbastanza piccoli

Fissato un valore di h , dopo aver tabulato i valori della funzione, si calcolano i vari rapporti incrementali con un algoritmo iterativo

© 2013 Pearson Education, Inc. or its affiliate(s). All rights reserved.

[illegible]

Grafico della funzione $y = 2x^2$ e della sua derivata

- La derivata ha un andamento rettilineo

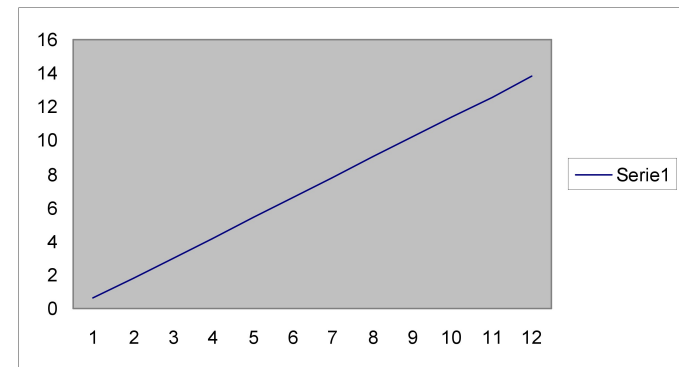
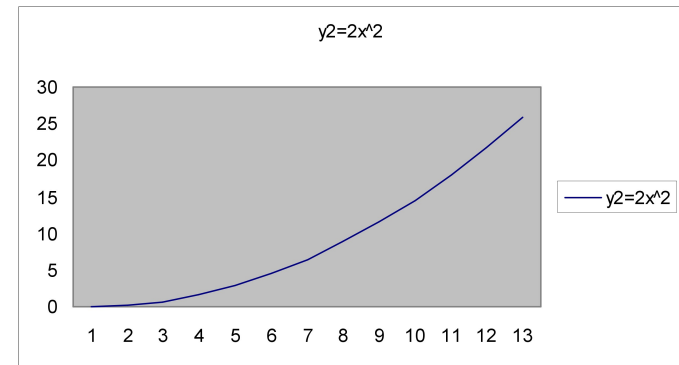


GRAFICO di $Y=\text{sen}(x)$ e della sua derivata

- Come si può osservare la derivata ha l'andamento di una cosinusoide
- Confronta relazione tra spazio e velocità nel moto armonico
- $S = R\text{sen}(\omega t + \varphi)$
- $V = \omega R\text{cos}(\omega t + \varphi)$

